

Fonksiyonel Derecelenmiş Sandviç Kirişlerin Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile Statik Analizi

Ahmad Reshad NOORİ¹, Hasibullah RASOOLİ², Timuçin Alp ASLAN^{*2},
Beytullah TEMEL²

¹*İstanbul Gelişim Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü,
İstanbul*

²*Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana*

Geliş tarihi: 07.12.2020

Kabul tarihi: 30.12.2020

Öz

Bu çalışmada, Fonksiyonel Derecelenmiş (FD) malzemeli simetrik ve simetrik olmayan katmanlardan oluşan sandviç kirişlerin statik davranışı araştırılmıştır. Mekanik özellikleri kesit yüksekliği boyunca değişen sandviç kirişlerin, yüzey tabakaları FD, çekirdek veya öz tabakası ise izotropik homojen malzeme olarak kabul edilmiştir. FD Sandviç kirişlerin eğilme davranışını idare eden kanonik denklemler minimum toplam enerji prensibi yardımıyla Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine göre elde edilmiştir. Elde edilen bu denklemler Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile sayısal olarak çözülmüştür. Araştırmada, farklı sınır koşullarının, uzunluk-yükseklik (L/h) oranlarının, malzeme değişim katsayılarının ve tabakalanma oranlarının kirişlerin eğilme davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Önerilen yöntemin doğruluğu ve uygulanabilirliği, elde edilen sonuçların literatürde bulunan çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılarak gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: İki noktalı sınır değer problemi, Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi, Sandviç kiriş, Fonksiyonel derecelenmiş malzemeler

Static Analysis of Functionally Graded Sandwich Beams by the Complementary Functions Method

Abstract

In this paper, the static analysis of sandwich Functionally Graded (FG) beams made of symmetric and asymmetric layers is investigated. The surface layers of the sandwich beam of which mechanical properties change along the thickness of the section are functionally graded and the material of the core layer is assumed to be isotropic homogenous. Canonically equations that govern the bending response of sandwich FG beams are obtained with the aid of the minimum total potential energy principle based on Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories. Obtained equations are solved numerically via the Complementary Functions Method (CFM). In this research the effects of different boundary conditions, length-height (L/h) ratios, material variation coefficients and layer ratios on the bending response of the

* Sorumlu (Corresponding author) yazar: Timuçin Alp ASLAN, taslan@cu.edu.tr

beam are investigated. The accuracy and applicability of the suggested approach are demonstrated by comparing the current results with those of the existing studies in the literature.

Keywords: Two-Point boundary value problem, Complementary functions method; Sandwich beam; Functionally graded materials

1. GİRİŞ

FD malzemeler, sahip olduğu birçok üstün mekanik özelliklerinden dolayı denizcilik, inşaat ve havacılık gibi çeşitli mühendislik dallarında geniş bir uygulama alanı bulmaktadır. İstenilen mekanik özelliklerin elde edilebilmesi için bu malzemeler, çoğu zaman katmanlı olarak kullanılmaktadır. Bu uygulamaya en iyi örnek FD sandviç kirişler verilebilir. Bu nedenle FD sandviç kirişlerin statik ve dinamik analizi önem kazanmış olup, davranışları birçok araştırmacı tarafından farklı yöntemler ve teoriler kullanılarak incelenmiştir.

Vo ve arkadaşları [1], yarı-üç boyutlu kiriş teorisini kullanarak düzgün yayılı yükler altındaki FD malzemeli simetrik ve simetrik olmayan sandviç kirişlerin statik davranışını incelemek için çeşitli sonlu eleman modelleri geliştirmişlerdir. Kadoli ve arkadaşları [2], yüksek mertebe kayma deformasyon teorisini kullanarak, sabit ve ankastre sınır koşullarına sahip FD kirişlerin statik davranışını incelemişlerdir. Şimşek ve arkadaşları [3], Timoshenko kiriş teorisini (TKT) kullanarak çeşitli kesit özellikleri ve sınır koşullarına sahip FD sandviç kirişlerin, sabit ivme ile hareket eden harmonik yükler altındaki statik, serbest ve zorlanmış titreşim analizlerini incelemişlerdir. Şimşek [4], basit mesnetli FD malzemeli kirişlerin statik davranışlarını Ritz metoduyla incelemiştir. Bunun yanı sıra elastisite modülünün değişiminin gerilme ve şekil değiştirme üzerindeki etkilerini araştırmıştır. Demirhan ve Taşkın [5] ise, transfer matris metodu yöntemi ile öz ve yüzey kalınlık oranlarının FD sandviç kirişlerin doğal frekans değerleri üzerindeki etkilerini incelemişlerdir.

Aslan ve arkadaşları [6], FD malzemeli kirişlerin serbest titreşim frekanslarını TFY yardımı ile sayısal olarak elde etmişlerdir. Karamanlı [7], iki

yönlü FD sandviç kirişlerin farklı sınır şartlarına sahip üniform yayılı yükler etkisi altındaki statik davranışlarını yarı-üç boyutlu teorisi ve İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği yöntemleri yardımı ile incelemiştir. Fereidoon ve arkadaşları [8], Euler-Bernoulli ve yüksek mertebe kayma deformasyon teorisini kullanarak, radyal yükleme altındaki eğri eksenli ve enine doğrultuda FD malzemeli sandviç kirişlerin statik davranışını incelemişlerdir. Li ve arkadaşları [9], Timoshenko ve Euler-Bernoulli kiriş teorilerini (EBKT) kullanarak FD kirişlerin farklı sınır koşulları altında eğilme davranışlarını analitik olarak incelemişlerdir.

Vo ve arkadaşları [10], Hamilton prensibi yardımıyla olayı idare eden hareket denklemlerini elde etmişler ve FD kirişlerinin statik ve serbest titreşim analizlerini kayma deformasyon teorisini kullanarak yapmışlardır. Noori ve arkadaşları [11], malzeme özellikleri eksen boyunca derecelenmiş çeşitli sınır şartlarına sahip FD kirişlerin farklı yükler altında gösterdiği eğilme tepkisini TFY yardımı ile incelemişlerdir. Sayyad ve Avhad [12], hiperbolik kayma deformasyon teorisini kullanarak yüzey malzemesi kalınlık boyunca değişen simetrik FD sandviç kirişlerin statik ve serbest titreşim analizlerini yapmışlardır. Apetre ve arkadaşları [13], birçok mevcut sandviç kiriş teorilerinin tek boyutlu FD çekirdekli sandviç plakların üzerine uygulanabilirliğini incelemişlerdir. Çalışmalarında dört farklı analitik modelleri, sonlu eleman çözümleri ile karşılaştırmışlardır.

Erdurcan ve Cunedioğlu [14], malzeme özellikleri kalınlık boyunca fonksiyonel değişen ankastre mesnetli sandviç kirişin serbest titreşim analizini Timoshenko Kiriş Teorisi (TKT)'yi kullanarak incelemişlerdir. Kahya ve Mosallam [15], orta tabakası homojen izotropik, diğer iki tabakası

kompozit malzemeli sandviç kirişlerin hareketli yükler altındaki dinamik davranışlarını Newmark metoduyla sayısal olarak incelemişlerdir. Zenkour ve Sobhy [16], geliştirilmiş sinüzoidal kayma deformasyon teorisini kullanarak basit mesnetli elastik zemin üzerine oturan FD viskoelastik sandviç kirişlerin eğilme analizini yapmışlardır.

Noori ve arkadaşları [17], aksel yönde FD kemerlerin düzlem içi yükler altındaki serbest ve zorlanmış titreşim analizi için etkin bir yöntem geliştirmişlerdir. Das ve Sarangi [18], basit mesnetli FD kirişin statik davranışını incelemek için ANSYS'te BEAM-188 elemanı kullanarak modellemiş ve neticesinde elde ettikleri sonuçları literatür sonuçları ile karşılaştırmışlardır. Frostig ve Baruch [19], tabakalı köpük çekirdekli sandviç kirişlerin tekil ve düzgün yayılı yükler altındaki statik analizini analitik olarak araştırmışlardır.

Uzay ve Geren [20], farklı uzunluk çekirdek kalınlıklarında üretilen düşük yoğunluklu polimer köpük çekirdekli sandviç kirişlerin eğilme analizlerini deneysel olarak incelemişler ve elde edilen sonuçları teorik sonuçlarla karşılaştırmışlardır. TFY, çeşitli mühendislik problemlerinde kolay uygulanabilirliği, başarılı ve yüksek hassasiyetli sonuçların elde edilebilmesi için oldukça etkin olduğu gibi nedenler ile yaygın olarak uygulanmıştır [21-33].

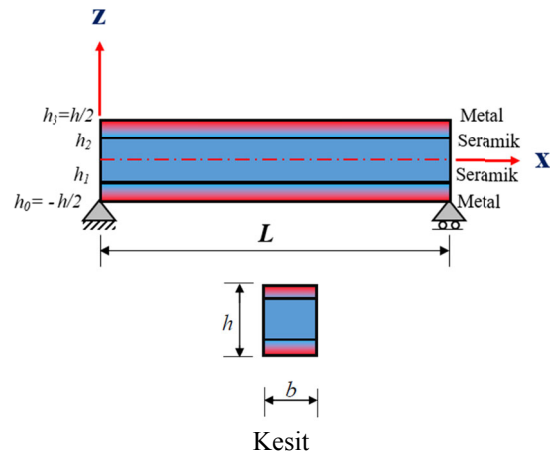
Yazarların bilgisine göre, FD malzemeli sandviç kirişlerin eğilme analizini TFY ile inceleyen hiçbir çalışma ile karşılaşılmamıştır. Bu kirişlerin statik yükler altındaki davranışı ilk kez bu araştırmada TFY ile ele alınmıştır. Minimum toplam potansiyel enerji ilkesi kullanılarak olayı idare eden denklemler çıkarılmıştır.

Bu araştırmada, farklı sınır koşullarının, uzunluk-yükseklik (L/h) oranlarının, malzeme değişim katsayılarının ve tabakalanma oranlarının bu tür kirişlerin eğilme davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Ayrıca, simetrik ve simetrik olmayan katmanlardan oluşan FD malzemeli sandviç kirişlerin statik yükler altında beklenen davranışını belirlemenin yanı sıra, bu metodun

etkin ve kolayca uygulanabilirliğini göstermeyi de amaçlamaktadır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Şekil 1'de görülen FD malzemeli sandviç kirişin malzeme değişim fonksiyonu Eşitlik 1'de verilmektedir.



Şekil 1. FD Sandviç kiriş ve malzeme değişimi

$$P^{(i)}(z) = (P_a - P_s) V_b^{(i)}(z) + P_a \quad (1)$$

Burada, P_a ve P_s sırasıyla alüminyum ve seramik bileşenlerine ait malzeme özellikleridir. $V_b^{(i)}$ ise hacim oranı olup, bu çalışmada malzeme değişim katsayısına (nz) bağlı olarak Eşitlik 2'de verilmiştir.

$$\begin{aligned} V_b^{(1)}(z) &= \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^{nz} & z \in [h_0, h_1] \\ V_b^{(2)}(z) &= 1 & z \in [h_1, h_2] \\ V_b^{(3)}(z) &= \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^{nz} & z \in [h_2, h_3] \end{aligned} \quad (2)$$

Tabaka kalınlık değişim oranı, kiriş alt yüzeyinden ($z=h_0=-h/2$) üst yüzeyine ($z=h_3=h/2$) üç farklı betimleme ile gösterilir. Örneğin, 1-1-1 oranı, üç eşit katmana sahip bir sandviç kirişi ifade etmektedir. Aksel ve düşey yer değiştirmeler U_x ve U_z , şekil değiştirmeler ise ϵ_x ve γ_{xz} olup,

bu büyüklükler Timoshenko kiriş teorisi için sırasıyla Eşitlik 3-4'te verilmektedir.

$$U_x = u(x,t) + z \theta(x,t) ; U_z = w(x,t) \quad (3)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta}{\partial x} ; \gamma_{xz} = \theta + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4)$$

Sandviç kirişlere ait gerilme ve şekil değiştirme arasındaki ilişkiler Eşitlik 5'te verilmektedir.

$$\sigma_x^{(i)} = E^{(i)}(z) \epsilon_x ; \tau_{xz}^{(i)} = G^{(i)}(z) \gamma_{xz} \quad (5)$$

Eşitlik 5'te verilen $E^{(i)}(z)$ elastisite modülü ve $G^{(i)}(z)$ kayma modülü kiriş kalınlığı boyunca hacim oranına bağlı olarak değişmektedir. Timoshenko kiriş teorisine dayalı olarak minimum toplam potansiyel enerji ifadesi Eşitlik 6'da verilmiştir.

$$\Pi_1 = \int_0^L \int_{A_s} \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \\ A_{22} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + A_{33} \left(\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ (q_x u + q_z w) \end{array} \right] dA dx \quad (6)$$

Bu eşitlikte görülen A_{11}, A_{12}, A_{22} ve A_{33} , kesit rijitlik sabitlerini simgelemektedir olup, Eşitlik 7'de verilen integrallerden hesaplanmaktadır.

$$\{A_{11}, A_{12}, A_{22}\} = \sum_{i=1}^3 \left(\int_{h_{i-1}}^{h_i} E^{(i)}(z) \{1, z, z^2\} dz \right) \quad (7)$$

$$A_{33} = k_s \sum_{i=1}^3 \left(\int_{h_{i-1}}^{h_i} G^{(i)}(z) dz \right)$$

Burada k_s , kayma düzeltme faktörüdür. Gerekli büyüklüklerin impulsif bileşenleri ve türevleri teşkil edilerek, FD malzemeli sandviç kirişlerin statik davranışını idare eden adi diferansiyel denklemler elde edilmiş ve Eşitlik 8-13'de verilmiştir.

$$\frac{du}{dx} = \frac{A_{12} M_x - A_{22} N_x}{b(A_{12}^2 - A_{11} A_{22})} \quad (8)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{Q_z}{b k_s A_{33}} - \theta \quad (9)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{-A_{11} M_x + A_{12} N_x}{b(A_{12}^2 - A_{11} A_{22})} \quad (10)$$

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x \quad (11)$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z \quad (12)$$

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_z \quad (13)$$

Bu çalışmada, ele alınan kiriş teorilerinden EBKT'yi kullanılırken, Eşitlik 9'daki $\frac{Q_z}{b k_s A_{33}}$ terimi ihmal edilmektedir. Eşitlik 8-13 matris formunda aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\frac{d\{Y(x)\}}{dx} = [A(x)]\{Y(x)\} + \{F(x)\} \quad (14)$$

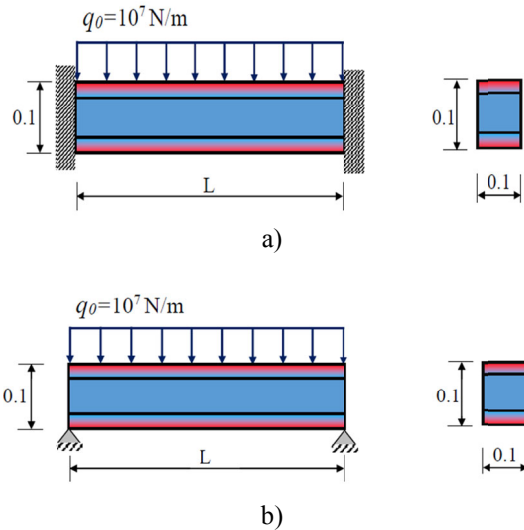
Burada x , bağımsız değişkendir. Eşitlik 14 TFY ile çözülmektedir. Bu yöntem, iki noktalı sınır değer problemini başlangıç değer problemine indirgemektedir. Bu Eşitliğin genel çözümü ise,

$$\{Y(x)\} = \sum_{m=1}^n C_m [U^{(m)}(x)] + \{V(x)\} \quad (15)$$

şekindedir. Burada $[U^{(m)}(x)]$ homojen çözüm olup, m 'inci bileşenine 1, diğerlerine sıfır değeri verilerek elde edilir. $\{V(x)\}$ ise özel çözüm olup, başlangıç şartları sıfır alınarak elde edilir. 8-13 Eşitliklerinin çözümü için gerekli olan sınır şartları [22]'de verilmiştir. İntegrasyon sabitleri (C_m) ise, problemin sınır şartlarından bulunur. (bkz. [21-24]).

3. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu çalışmada, FD malzemeli simetrik ve simetrik olmayan tabakalı sandviç kirişlerin statik davranışı üzerine, farklı sınır koşullarının, uzunluk-yükseklik (L/h) oranlarının, malzeme değişim katsayılarının ve farklı tabakalanma oranlarının etkileri parametrik olarak araştırılmıştır. Bu amaçla, Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Programda, TFY'ye dayalı başlangıç değer probleminin çözümü RK5 algoritması ile yapılmıştır.



Şekil 2. Yayılı yük etkisinde A-A, a) ve S-S, b) Sınır şartlarına sahip FD Sandviç kirişler

Bu bölümde, farklı sınır şartları ve uzunluk-yükseklik oranları için statik yüklerin etkisinde olan sandviç kirişlerin boyutsuz düşey deplasmanları hesaplanmıştır. Deplasmanlar aşağıda verilen Eşitlik 16 yardımı ile boyutsuz hale getirilmiştir.

$$\lambda = \frac{100 E_a h^3}{q_0 L^4} w \left(\frac{L}{2}, z \right) \quad (16)$$

Sayısal uygulamalarda, FD malzemeler için Çizelge 1'de verilen malzeme özellikleri kullanılmıştır.

Çizelge 1. Malzeme özellikleri

Malzeme	E (Gpa)	ν
Alüminyum (P_a)	70	0,3
Seramik (P_s)	380	0,3

Tüm FD sandviç kirişler yayılı yük ($q_z=q_0$) etkisinde olup, geometrik özellikleri şöyledir: Kirişin enkesiti kare olup ($h=0,1$), TKT için kayma düzeltme faktörü 5/6 olarak alınmıştır.

Araştırmada ilk olarak, farklı uzunluk-yükseklik oranları için Şekil 2'de verilen Ankastr-Ankastr (A-A) ve Sabit-Sabit (S-S) sınır şartlarına sahip ve FD Euler-Bernoulli ve Timoshenko sandviç kirişlerin boyutsuz maksimum deplasmanları hesaplanmıştır. Burada, simetrik ve simetrik olmayan tabakalanma durumu için FD sandviç kirişe ait bulunan boyutsuz deplasmanlar literatürde ([1]) verilen değerler ile Çizelge 2-3 üzerinde karşılaştırılmıştır.

Çizelge 2. Ankastr- Ankastr sınır şartları için boyutsuz deplasman değerleri

			Tabakalanma oranı							
			1-1-1		1-2-1		2-1-1		2-2-1	
L/h	Kiriş Teorisi	nz	Vo [1]	TFY	Vo [1]	TFY	Vo [1]	TFY	Vo [1]	TFY
5	EBKT	0	0,5757	0,5757	0,5757	0,5757	0,5757	0,5757	0,5757	0,5757
		1	1,1836	1,1838	1,0160	1,0158	1,2349	1,2354	1,0989	1,0987
		2	1,6015	1,6016	1,2811	1,2813	1,6947	1,6946	1,4368	1,4370
		5	2,1623	2,1627	1,6282	1,6285	2,2693	2,2702	1,8777	1,8771
	TKT	0	0,8630	0,8635	0,8630	0,8635	0,8630	0,8635	0,8630	0,8635
		1	1,5783	1,5781	1,3770	1,3765	1,6489	1,6486	1,4793	1,4795
		2	2,0523	2,0518	1,6758	1,6755	2,1800	2,1806	1,8634	1,8637
		5	2,6879	2,6880	2,0635	2,0630	2,8556	2,8560	2,3624	2,3632

		1-1-1		1-2-1		2-1-1		2-2-1		
20	EBKT	0	0,5757	0,5757	0,5757	0,5757	0,5757	0,5757	0,5757	0,5757
		1	1,1836	1,1836	1,0160	1,0160	1,2349	1,2349	1,0989	1,0989
		2	1,6015	1,6015	1,2811	1,2811	1,6947	1,6949	1,4368	1,4370
		5	2,1623	2,1623	1,6282	1,6282	2,2693	2,2698	1,8777	1,8774
	TKT	0	0,5936	0,5936	0,5936	0,5936	0,5936	0,5936	0,5936	0,5936
		1	1,2083	1,2083	1,0385	1,0385	1,2607	1,2608	1,1226	1,1227
		2	1,6297	1,6297	1,3058	1,3058	1,7250	1,7253	1,4635	1,4636
		5	2,1952	2,1952	1,6554	1,6554	2,3060	2,3064	1,9074	1,9077

Çizelge 3. Sabit- Sabit sınır şartları için boyutsuz deplasman değerleri

			Tabakalanma oranı								
			1-1-1		1-2-1		2-1-1		2-2-1		
L/h	Kiriş Teorisi	nz	V_0 [1]	TFY	V_0 [1]	TFY	V_0 [1]	TFY	V_0 [1]	TFY	
5	EBKT	0	2,8783	2,8784	2,8783	2,8784	2,8783	2,8784	2,8783	2,8784	
		1	5,9181	5,9181	5,0798	5,0803	6,1746	6,1746	5,4944	5,4947	
		2	8,0074	8,0069	6,4056	6,4053	8,4744	8,4750	7,1846	7,1848	
		5	10,811	10,811	8,1409	8,1413	11,348	11,349	9,3867	9,3867	
	TKT	0	3,1657	3,1651	3,1657	3,1651	3,1657	3,1651	3,1657	3,1651	
		1	6,3128	6,3123	5,4408	5,4410	6,5886	6,5890	5,8749	5,8755	
		2	8,4582	8,4582	6,8003	6,8006	8,9597	8,9600	7,6112	7,6115	
		5	11,337	11,337	8,5762	8,5758	11,934	11,934	9,8720	9,8728	
	20	EBKT	0	2,8783	2,8783	2,8783	2,8783	2,8783	2,8783	2,8783	2,8783
			1	5,9181	5,9181	5,0798	5,0798	6,1746	6,1746	5,4944	5,4945
2			8,0074	8,0074	6,4056	6,4056	8,4744	8,4746	7,1846	7,1848	
5			10,811	10,811	8,1409	8,1409	11,348	11,348	9,3867	9,3870	
TKT		0	2,8963	2,8963	2,8963	2,8963	2,8963	2,8963	2,8963	2,8963	
		1	5,9428	5,9428	5,1024	5,1024	6,2004	6,2005	5,5182	5,5183	
		2	8,0356	8,0356	6,4302	6,4302	8,5047	8,5049	7,2113	7,2114	
		5	10,844	10,844	8,1681	8,1681	11,385	11,385	9,4170	9,4173	

Çizelgeler incelendiğinde, FDM sandviç kirişler için önerilen yöntem ile hesaplanan boyutsuz maksimum deplasman değerlerinin literatür ile uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

Ayrıca, Ankastre-Sabit (A-S) sınır şartlarında farklı uzunluk-yükseklik oranları ($L/h=5$ ve 20) için FD sandviç kirişin boyutsuz deplasman değerleri hesaplanmış ve Çizelge 4'de verilmiştir.

Çizelgelere göre tüm sınır şartları ve tabakalanma durumları için FD sandviç kirişlerin açıklık ortasındaki düşey deplasmanın Timoshenko kiriş

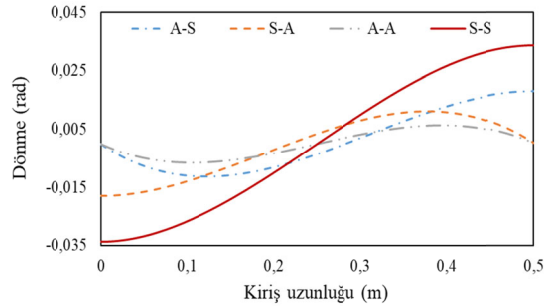
teorisi kullanıldığında daha büyük olduğu gözlemlenmiştir. Bunun yanı sıra her üç sınır şartında da TKT'ne göre L/h oranı arttıkça düşey deplasman değeri azalmaktadır. Ayrıca, her iki kiriş teorisinde de L/h oranı fark etmeksizin tüm tabakalanma durumlarında malzeme değişim katsayısı arttıkça boyutsuz düşey deplasman değerlerinin arttığı görülmüştür. Tabakalanma durumlarına göre çizelgeler incelendiğinde FD sandviç kirişlerde en büyük düşey deplasmanın 2-1-1 tabakalanma oranında gerçekleştiği görülmüştür. Son olarak çizelgelere göre en büyük boyutsuz düşey deplasmanın S-S sınır şartlarında meydana geldiği anlaşılmaktadır.

Çizelge 4. Ankastre- Sabit sınır şartları için boyutsuz deplasman değerleri

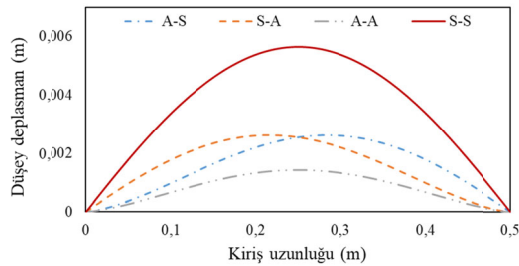
L/h	Kiriş Teorisi	nz	Tabakalanma oranı			
			1-1-1	1-2-1	2-1-1	2-2-1
5	EBKT	0	1,1939	1,1939	1,1939	1,1939
		1	2,4539	2,1067	2,5693	2,2837
		2	3,3208	2,6566	3,5381	2,9949
		5	4,5136	3,3757	4,7566	3,9278
	TKT	0	1,5165	1,5165	1,5165	1,5165
		1	2,8986	2,5122	3,0352	2,6533
		2	3,8282	3,1002	4,0869	3,4765
		5	5,0758	3,8662	5,4208	4,4766
			1-1-1	1-2-1	2-1-1	2-2-1
20	EBKT	0	1,1937	1,1937	1,1937	1,1937
		1	2,4543	2,1067	2,5690	2,2842
		2	3,3208	2,6565	3,5382	0,0300
		5	4,4838	3,3762	4,7569	3,9276
	TKT	0	1,2139	1,2139	1,2139	1,2139
		1	2,4822	2,1322	2,5982	2,3111
		2	3,3526	2,6843	3,5725	3,0252
		5	5,8335	3,4069	4,7985	3,9620

Çalışmanın devamında Timoshenko kiriş teorisine göre, 1-1-1 tabakalanma durumunda farklı sınır şartlarına sahip sandviç kirişin ($L/h=5$), malzeme değişim katsayıları $nz=1$ ve $nz=2$ için kiriş boyunca düşey deplasman ve dönme değerleri bulunarak grafik halinde sunulmuştur (Şekil 3-6).

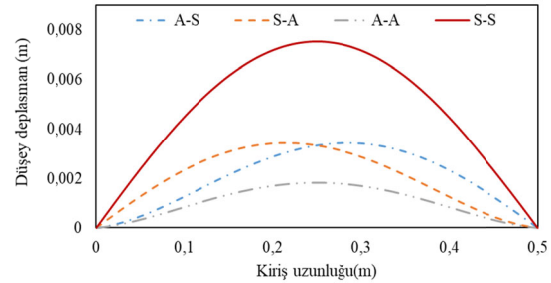
Şekillere bakıldığında her iki malzeme değişim katsayısı durumunda S-S sınır şartlarına sahip kirişlerde düşey deplasman ve dönmelerin en fazla, A-A sınır şartlarında ise en az olduğu görülmektedir.



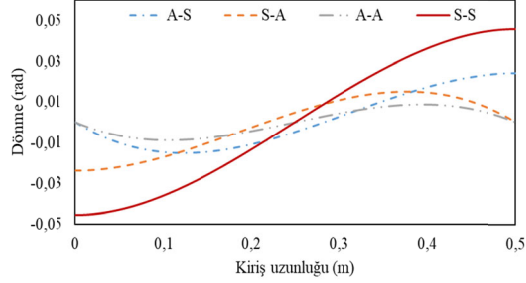
Şekil 4. FD sandviç kirişin dönmesi ($nz=1$)



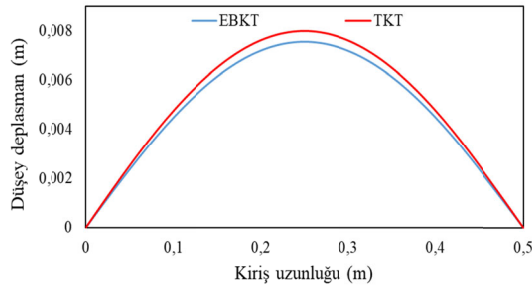
Şekil 3. FD sandviç kirişin düşey deplasmanı ($nz=1$)



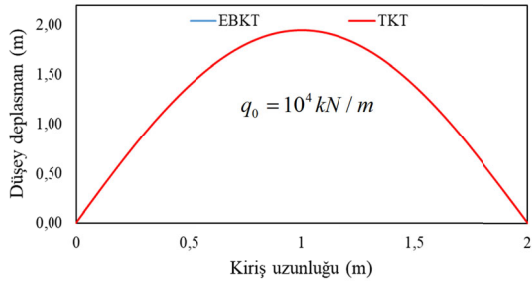
Şekil 5. FD sandviç kirişin düşey deplasmanı ($nz=2$)



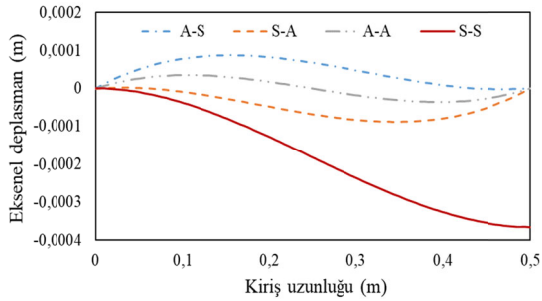
Şekil 6. FD sandviç kirişin dönmesi ($nz=2$)



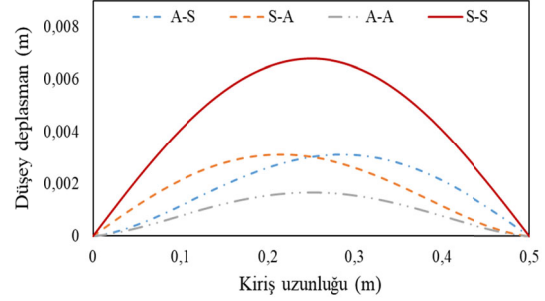
Şekil 7. FD sandviç kirişin $L/h= 5$ için düşey deplasmanın karşılaştırılması ($nz=2$)



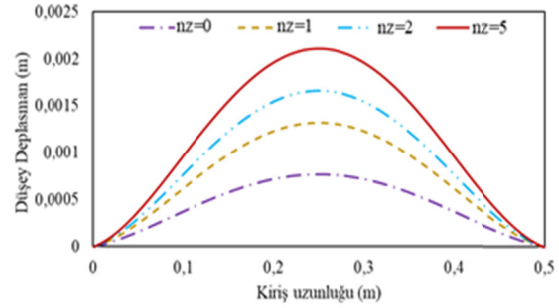
Şekil 8. FD sandviç kirişin $L/h= 20$ için düşey deplasmanın karşılaştırılması ($nz=2$)



Şekil 9. FD sandviç kirişin $L/h= 5$ için eksenel deplasmanın karşılaştırılması ($nz=2$)



Şekil 10. FD sandviç kirişin $L/h= 5$ için düşey deplasmanın karşılaştırılması ($nz=2$)



Şekil 11. FD sandviç kirişin $L/h= 5$ için düşey deplasmanın karşılaştırılması

Daha sonra, 2-1-1 tabakalanma halinde A-A sınır şartları, farklı uzunluk/yükseklik ($L/h=5$ ve 20) oranları ve $nz=2$ durumu için düşey deplasman grafikleri Şekil 7 ve 8'de verilmiş, EBKT ve TKT kiriş teorileri için karşılaştırılmıştır.

Grafikler incelendiğinde, L/h oranı arttıkça, -ki bu durum ince çubuk teorisine karşılık gelmektedir- her iki kiriş teorisine göre elde edilen sonuçlar üst üste düşmektedir. Bu durumda kayma şekil değiştirme etkisinin olmadığı ortaya çıkmaktadır.

Ayrıca Timoshenko kiriş teorisine göre, 2-2-1 tabakalanma dizilimindeki sandviç kirişlerin statik yük etkisi altındaki davranışı araştırılmıştır. Farklı sınır şartlarına sahip sandviç kirişin, malzeme değişim katsayısı $nz=2$ için kiriş boyunca eksenel ve düşey deplasman değerleri Şekil (9-10)'da karşılaştırılmıştır. Şekiller incelendiğinde, FD sandviç kirişe ait en büyük eksenel ve düşey deplasmanın S-S sınır şartlarında olduğu gözlemlenmiştir.

Son olarak, iki ucundan ankastre mesnetli Timoshenko kirişinin $L/h=5$ oranı ve farklı malzeme değişim katsayıları ($nz=0,1,2,5$) için çözümleri Şekil 11'de sunulmuştur. Şekil 11 incelendiğinde görülmektedir ki, malzeme değişim katsayısı arttıkça deplasman değeri de artmaktadır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, FD malzemeli simetrik ve simetrik olmayan sandviç kirişlerin statik davranışı incelenmiştir. Problemin statik davranışını idare eden kanonik denklemler, birinci mertbe kayma deformasyon teorisine göre minimum toplam potansiyel enerji ilkesi ile elde edilmiştir. Elde edilen kanonik denklemler, TFY ile sayısal olarak çözülmüştür.

Çeşitli malzeme değişim katsayılarının, sınır koşullarının ve L/h oranlarının üzerindeki etkileri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Malzeme değişim katsayısı arttıkça yer değiştirmelerin de arttığı görülmüştür. Ele alınan sınır koşulları arasında en büyük yer değiştirmeler S-S ve en küçük deplasmanlar A-A durumunda gözlemlenmiştir. Sandviç FD kirişlerde de L/h oranı arttıkça kayma şekil değiştirme etkisinin azaldığı görülmüştür.

Tabaklanma oranı hem simetrik hem de simetrik olmayan FD sandviç kirişlerin eğilme davranışını önemli ölçüde etkilemektedir. Dolayısıyla, istenilen mekanik özelliklerine sahip FD sandviç kirişler oluşturulurken bu oranlar göz önünde bulundurulabilir.

Son olarak bu çalışmada önerilen metodun, FD sandviç kirişlerin eğilme analizi için oldukça etkin ve kolayca uygulanabilir olduğu görülmüştür.

5. KAYNAKLAR

1. Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., Inam, F., Lee, J., 2015. Static Behavior of Functionally Graded Sandwich Beams Using a Quasi-3D Theory. Composites Part B: Engineering, 68, 59-74.
2. Kadoli, R., Akhtar, K., Ganesan, N., 2008. Static Analysis of Functionally Graded Beams Using Higher Order Shear Deformation Theory. Applied Mathematical Modelling, 32(12), 2509-2525.
3. Şimşek, M., Al-Shujairi, M., 2017. Static, Free and Forced Vibration of Functionally Graded (FG) Sandwich Beams Excited By Two Successive Moving Harmonic Loads. Composites Part B: Engineering, 108, 18-34.
4. Şimşek, M., 2009. Static Analysis Of a Functionally Graded Beam Under a Uniformly Distributed Load By Ritz Method. International Journal of Engineering and Applied Sciences, 1(3), 1-11.
5. Demirhan, P.A., Taşkın, V., 202. Transfer Matris Metodu ile Fonksiyonel Derecelendirilmiş Sandviç Kirişlerin Titreşim Analizi. Dicle Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mühendislik Dergisi, 11(1), 259-269.
6. Aslan, T.A., Noori, A.R., Temel, B., 2019. Birinci Mertbe Kayma Deformasyon Teorisine Dayalı FD Düz Eksenli Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi. Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi, 34(4), 21-28.
7. Karamanlı, A., 2017. Bending Behavior of Two Directional Functionally Graded Sandwich Beams By Using a Quasi-3D Shear Deformation Theory. Composite Structures, 174, 70-86.
8. Fereidoon, A., Andalib, M., Hemmatian, H., 2015. Bending Analysis of Curved Sandwich Beams with Functionally Graded Core. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 22(7), 564-577.
9. Li, S.R., Cao, D.F., Wan, Z.Q., 2013. Bending Solutions of FGM Timoshenko Beams from Those of the Homogenous Euler-Bernoulli Beams. Applied Mathematical Modelling, 37(10-11), 7077-7085.
10. Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., Inam, F., 2014. Static and Vibration Analysis of Functionally Graded Beams Using Refined Shear Deformation Theory. Meccanica, 49(1), 155-168.
11. Noori, A.R., Aslan, T.A., Temel, B., 2020. Static Analysis of FG Beams Via

- Complementary Functions Method. European Mechanical Science, 4(1), 1-6.
12. Sayyad, A. S., Avhad, P. V., 2019. On Static Bending, Elastic Buckling and Free Vibration Analysis of Symmetric Functionally Graded Sandwich Beams. Journal of Solid Mechanics, 11(1), 166-180.
 13. Apetre, N.A., Sankar, B.V., Ambur, D.R., 2008. Analytical Modeling of Sandwich Beams with Functionally Graded Core. Journal of Sandwich Structures & Materials, 10(1), 53-74.
 14. Erdurcan, E.F., Cunedioğlu, Y., 2020. Porositeli FDM ile Kaplı Alüminyum Kirişin Serbest Titreşiminin İncelenmesi. Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 9(2), 1090-1099.
 15. Kahya, V., Mosallam, A.S., 2009. Kompozit Sandviç Kirişlerin Hareketli Yük Etkisi Altında Dinamik Davranış. XVI. Ulusal Mekanik Kongresi, 22-26 Haziran 2009.
 16. Zenkour, A.M., Allam, M.N.M., Sobhy, M., 2010. Bending Analysis of FG Viscoelastic Sandwich Beams with Elastic Cores Resting on Pasternak's Elastic Foundations. Acta Mechanica, 212(3-4), 233-252.
 17. Noori, A.R., Aslan, T.A., Temel, B., 2018. An Efficient Approach for In-Plane Free and Forced Vibrations of Axially Functionally Graded Parabolic Arches With Nonuniform Cross Section. Composite Structures, 200, 701-710.
 18. Das, S., Sarangi, S.K., 2016. Static Analysis of Functionally Graded Composite Beams. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 149(1), 012138.
 19. Frostig, Y., Baruch, M., 1990. Bending of Sandwich Beams with Transversely Flexible Core. AIAA journal, 28(3), 523-531.
 20. Uzay, C., 2020. Failure Analysis of Low-density Polymer Foam Core Sandwich Structures under Three-point Bending Loading. ÇÜ Müh. Mim. Fak. Dergisi, 35(1).
 21. Rasooli, H., Temel, B., 2019. Değişken Kesitli ve Tabakalanmış Kompozit Malzemeli, Doğru ve Daire Eksenli Karma Sistemlerin Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile Statik Analizi. Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 8(3), 46-56.
 22. Noori, A.R., Aslan, T.A., Temel B., 2020. Static Analysis of FG Beams via Complementary Functions Method. European Mechanical Science, 4(1), 1-6.
 23. Yıldırım, S., Tütüncü, N., 2018. On the Inertio-Elastic Instability of Variable-Thickness Functionally-Graded Disks. Mechanics Research Communications, 91, 1-6.
 24. Yıldırım, S., Tütüncü, N., 2019. Effect of Magneto-Thermal Loads on the Rotational Instability of Heterogeneous Rotors. AIAA Journal, 57(5), 2069-2074.
 25. Yontar, O., Aydın K., Keleş İ., 2020. Practical Jointed Approach to Thermal Performance of Functionally Graded Material Annular Fin. Journal Of Thermophysics and Heat Transfer, 34(1), 144-149.
 26. Çelebi, K., Yarımabaç, D., Tütüncü, N., Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams Using Complementary Functions Method. Arch Appl Mech <https://doi.org/10.1007/s00419-017-1338-6>.
 27. Temo, A., Yarımabaç, D., 2019. The Effect of Uniform Magnetic Field on Pressurized FG Cylindrical and Spherical Vessels. European Mechanical Science, 3(4), 133-141.
 28. Çalım, F.F., 2019. Vibration Analysis of Functionally Graded Timoshenko Beams on Winkler-Pasternak Elastic Foundation. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering. <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs40996-019-00283-x>.
 29. Çalım, F.F., 2016. Transient analysis of axially functionally graded Timoshenko beams with variable cross-section. Composite Part B: engineering, 98, 472-483.
 30. Aslan, T.A., Noori, A.R., Temel B., 2019. Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisine Dayalı FD Düz Eksenli Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi. Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi, 34 (4), 21-28.
 31. Aslan, T.A., Noori, A.R., Temel B., 2019. Çift Yönlü Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemeli Timoshenko Kirişlerinin Serbest Titreşim Analizi. Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 8(3), 30-36.

32. Temel B., Noori, A.R., 2020. A Unified Solution for the Vibration Analysis of Two-directional Functionally Graded Axisymmetric Mindlin–Reissner Plates with Variable Thickness. *International Journal of Mechanical Sciences*, 174, 1-20.
33. Yıldırım, S., 2020. Free Vibration Analysis of Sandwich Beams with Functionally-Graded-Cores by Complementary Functions Method. *AIAAJ*, 58(12), 5431-5439. doi: doi/abs/10.2514/1.J059587.