

LiDAR-Tabanlı toplam değişinti kısıtlı negatif-olmayan tensör faktörizasyonu ile hiperspektral karışım giderimi

Hyperspectral unmixing with LiDAR-Based total variation regularized non-negative tensor factorization

Kubilay ATAŞ^{1*}, Atakan KAYA², Sevcan KAHRAMAN¹

¹Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, İstanbul Gelişim Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.
kuatas@gelisim.edu.tr, sekahraman@gelisim.edu.tr

²Prodrive Technologies, Yazılım Geliştirme, Son, Hollanda.
kaya.atakan94@gmail.com

Geliş Tarihi/Received: 06.08.2021
Kabul Tarihi/Accepted: 08.04.2022

Düzeltilme Tarihi/Revision: 21.03.2022

doi: 10.5505/pajes.2022.70375
Araştırma Makalesi/Research Article

Öz

Spektral karışım giderimi hiperspektral görüntülemenin temel araştırma alanlarından birisidir. Son yıllarda Negatif-olmayan Tensör Faktörizasyonuna dayalı yaklaşımlar, bilgi kaybına uğratmadığı ve hiperspektral görüntüleri daha iyi temsil edebildiği için uzaktan algılamada büyük bir önem kazanmıştır. Toplam Değişinti yaklaşımı ise, parçalı pürüzsüzlüğü sağlarken kenar bilgisini de korumaktadır. Öte yandan, kızılötesi algılayıcısı gözlemlenen sahne hakkında yükseklik bilgisini veren Dijital Yüzey Modeli verisini sağlamaktadır. Bu çalışmada, LiDAR Dijital Yüzey Modeli bilgisiyle Toplam Değişinti kısıtlı birleştirilerek hiperspektral görüntülerin uzamsal çözünürlüğünü artırmak için tensör faktörizasyonuna dayalı karışım giderimi gerçekleştirilmiştir. Deneysel çalışmalar simülasyon ve gerçek veri setleri üzerinde denenmiş ve uzamsal çözünürlüğü artırılmış hiperspektral görüntüler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, literatürdeki en yakın çalışma olan Toplam Değişinti kısıtlı Negatif-olmayan Matris-Vektör Tensor Faktörizasyonu yöntemi ile karşılaştırılmış ve önerilen yöntemin daha iyi performans sergilediği gözlemlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Hiperspektral görüntü, Kızılötesi, Veri kaynaştırma, Spektral karışım giderimi, Toplam değişinti.

Abstract

Spectral unmixing is one of the main research areas of hyperspectral image analysis. In recent years, Non-Negative Tensor Factorization based approaches have gained great importance in remote sensing as they do not lose information and can better represent hyperspectral images. The Total Variation approach preserves the edge information while providing piece-wise smoothness. On the other hand, the Light Detection and Ranging sensor provides Digital Surface Model information that gives height information about the observed scene. In this study, hyperspectral unmixing based on tensor factorization is performed to increase the spatial resolution of hyperspectral images by combining LiDAR Digital Surface Model information with Total Variation constrained. Experimental studies are carried out on simulation and real data sets and high spatial resolution hyperspectral images is obtained. The obtained results is compared with the state of the art Total Variation constrained Matrix-Vector Non-Negative Tensor Factorization approach and it is observed that the proposed method obtain better performance.

Keywords: Hyperspectral image, Light detection and ranging, Data fusion, Spectral unmixing, Total variation.

1 Giriş

Uzaktan algılamadaki en yeni teknolojilerden biri olan hiperspektral algılayıcılar, yeryüzeyinin görüntülenmesi sırasında sahip oldukları yüzlerce bant sayesinde gözlemledikleri sahne ile ilgili ayrıntılı bilgi sunmaktadır. Bu özelliği nedeniyle, hiperspektral görüntüler birçok uygulamada kullanılmaktadır. Örneğin, değişim tespiti, hedef takibi [1], yeryüzü yüzeyinin sınıflandırılması [2], çevresel monitörleme vb. sayılabilmektedir. Hiperspektral karışım giderimi analizi son yıllarda hiperspektral görüntü işlemede kullanılan önemli bir araştırma alanı haline gelmiştir [3]. Birçok karışım giderimi modeli sunulmuştur. Bunlardan en çok kullanılan Lineer Karışım Modeli-LKM (Linear Mixture Model - LMM) her bir pikseli son elemanlar ve onlara karşılık gelen bolluk değerlerinin lineer kombinasyonu şeklinde ifade etmektedir [4]. Hiperspektral karışım giderimi probleminin çözümü için Negatif-olmayan Matris Faktörizasyonu - NMF (Non-negative Matrix Factorization-NMF) en iyi yaklaşımla hiperspektral veriyi iki tane negatif olmayan matrisin çarpımı şeklinde

bulmayı amaçlamaktadır [5],[6]. Bu matrisler son elemanlar ve onlara karşılık gelen bolluk değeri haritalarıdır. Bununla birlikte, NMF'nin objektif fonksiyonu konveks değildir ve birçok lokal çözüme karşılık gelmektedir. Bu problemin üstesinden gelmek için spektral bilgi, uzamsal bilgi veya ikisi birden NMF modeline dahil edilerek bolluk ve/veya son eleman matrislerine bir dizi kısıtlama uygulanmaktadır [7]. Bolluk matrisi için uygulanan en yaygın kısıtlamalar seyreklik ve pürüzsüzlük olarak sayılabilmektedir. En yaygın olarak kullanılan bir diğer yaklaşım ise, Toplam Değişinti-TD (Total Variation-TV) kısıtlamasıdır. TD kısıtlaması görüntüdeki objelerin kenar yapısı bilgisini koruma özelliğine sahiptir ve her bir pikselin yalnızca en yakın dört komşusu ile benzerliğe sahip olduğu varsayımını kabul etmektedir [8]. Bu kısıtlamalar NMF'de dikkate değer bir performans sunmasına rağmen 3-boyutlu hiperspektral veriyi 2-boyutlu veriye dönüştürdüğü için ciddi boyutta bilgi kaybına sebep olmaktadır [9]. NMF'ye alternatif olan tensör faktörizasyonu (tensör çarpanlarına ayırma) yaklaşımı, iki tane uzamsal ve bir tane spektral boyuta sahip olan hiperspektral veriyi doğal bir açılım şeklinde üç tane

*Yazışılan yazar/Corresponding author

farklı modda ifade edebilmektedir [10]. Fakat, tensör faktörizasyonuna dayalı yaklaşımlarda sinyal-gürültü oranının (signal-to-noise ratio-SNR) düşmesi ve çözümün tek olmaması, üstesinden gelinmesi gereken sorunların başında gelmektedir. Bu nedenle, tensör faktörizasyonu üzerine çeşitli uzamsal kısıtlamalar getirilerek bu sorunların üstesinden gelinebilmektedir. Tensör çarpanlarına ayırma işlemine negatif-olmama, seyreklik, basitlik, pürüzsüzlük ve yerel uzamsallık gibi çeşitli kısıtlamaların dahil edildiği pek çok çalışma gerçekleştirilmiştir [11]-[13].

Son yıllarda, tensör faktörizasyonuna dayalı çeşitli karışım giderimi yaklaşımları sunulmuştur. Qian ve diğ. [14], Blok Terim Ayırıştırma tabanlı Matris-Vektör Negatif-olmayan Tensör Faktörizasyonu-MV-NTF (Matrix-Vector Non-negative Tensor Factorization-MV-NTF) yaklaşımını karışım giderimi yaklaşımı için önermişlerdir. Bu yaklaşım bir hiperspektral görüntüyü sırasıyla son elemanlar ve onlara karşılık gelen bolluk haritalarını temsil eden düşük seviyeli bir matrisin ve bir vektörün dış çarpımı olan R seviyeli bileşen tensörlerine ayırmaktadır. Deneysel sonuçlar, bu yöntemin çoğu NMF temelli ayırıştırma yaklaşımından daha iyi performans sağladığını göstermiştir.

Sensör teknolojilerindeki en son gelişmeler hiperspektral ve LiDAR verisinin eş zamanlı olarak elde edilmesini sağlamaktadır. Bu görüntüleme sistemleri farklı bakış açılarında bilgiler sunmaktadırlar. Böylelikle, yeryüzü yüzeyindeki nesnelerin görüntüleri farklı bakış açılarıyla elde edilebilmektedir. Hiperspektral görüntü detaylandırılmış spektral bilgiyi sunarken LiDAR verisi gözlemlenen sahnenin yükseklik bilgisini sunmaktadır [15]. Ancak, hiperspektral görüntüler benzer materyallerden yapılan farklı objeleri ayırt edememektedir (asfalttan yapılmış yol ve çatı). Buna ek olarak, hiperspektral görüntüler bulutlu hava şartlarından etkilenmektedir. Öte yandan, LiDAR verisi gözlemlendiği sahnenin yükseklik bilgisini sunmaktadır. Bütün hava şartlarında LiDAR verisi, yükseklik, eğim, oryantasyon, eğrilik, ağaç yüksekliği gibi geometrik bilgi sağlamaktadır [16]. LiDAR algılayıcısı gözlemlenen sahne hakkında yükseklik bilgisini veren Dijital Yüzey Modeli-DYM (Digital Surface Model - DSM) verisini sağlamaktadır. Fakat LiDAR verisi aynı yükseklikte olan farklı verileri ayırt edememektedir (yeşil alan ve yüzme havuzu gibi). Bu nedenle, hiperspektral görüntülerle aynı sahnenin LiDAR verilerinin kaynaştırılması sonucunda uzamsal çözünürlüğü artırılmış hiperspektral görüntüler elde edilebilmektedir [17]. Hiperspektral görüntü, gözlemlenen sahne hakkında yeterli uzamsal-spektral bilgi sağlamaktadır. Ancak, bu bilgi bazı durumlarda komşu fakat farklı nesneleri doğru bir şekilde ayırt etmek için yeterli olmayabilir. Bu durumda, LiDAR-DYM verileri kullanılarak elde edilen yükseklik bilgisi yardımıyla nesneleri ayırt etme işlemi başarılı bir şekilde gerçekleştirilebilmektedir. Tatsumi ve diğ. [18], hiperspektral karışım giderimi için, uzamsal düzenleme ağırlıklarını LiDAR-DYM bilgisini kullanarak hesaplamış ve TD kısıtını NMF üzerinde uygulamışlardır. Böylelikle, performansı artırılmış karışım giderimi sonuçları elde etmişlerdir. Yüksel ve Boyacı [19], gölgeli alanlarda LiDAR katkısını test etmek için sadece hiperspektral ve sadece LiDAR bilgisini kullanan iki farklı yöntem denemişlerdir. Buna göre, LiDAR kullanılan yöntemde gölgeli alan tespiti için eşik değer belirleme zorunluluğu ortadan kaldırılmışken, işlem süresinin uzadığı gözlemlenmiştir.

Literatürde LiDAR verisini ve TD kısıtını karışım giderimi için NTF'de kullanan birkaç çalışma bulunmaktadır. Xue ve diğ.

[20], hiperspektral ve LiDAR veri kaynaştırması için Birleştirilmiş Yüksek Seviyeli Tensör Faktörizasyonu - BYSTF (Coupled High-Order Tensör Factorization - CHOTF) modelini gerçekleştirerek daha iyi bir sınıflandırma sonucu elde etmişlerdir. Li ve diğ. , LiDAR verisini [21] ve LiDAR noktalar bulutunu [22] kullanarak yüksek seviyeli tensör özelliklerini elde etmişler ve bunları sınıflandırma başarımını artırmak için kullanmışlardır. Xiong ve diğ. [23], NTF'yi kullanarak hiperspektral karışım gideriminde TD kısıtlamasına dayalı uzamsal düzenleyici yaklaşımını kenar bilgisini korumak için önermişlerdir. He ve diğ. [24], düşük-rank tensör modeliyle TD düzenleyicisini hiperspektral görüntülerin süper çözünürlüğünü artırmak için uygulamışlardır. Rasti ve diğ. [25], sınıflandırma başarımını artırmak için hiperspektral ve LiDAR verilerinin bilgisini birleştirerek Ortogonal Toplam Değişinti Bileşen Analizi-OTDBA (Orthogonal Total Variation Component Analysis-OTVCA) yaklaşımını önermişlerdir.

TD kısıtı, görüntüdeki detay bilgilerini korurken tensör çarpanlarına ayırma uzamsal bilginin korunmasını sağlamaktadır. Bu bilgiye ek olarak LiDAR-DYM bilgisi gözlemlenen sahnedeki yükseklik bilgisi detaylarını sunmaktadır. Bu çalışmada, hiperspektral görüntülerin çözünürlüğünü artırmak için LiDAR-DYM verisi yardımıyla TD kısıtı hesaplanmış ve tensör ayırıştırması kullanılarak daha iyi karışım giderimi sonucu elde edilmiştir. Deneysel çalışmalar yapay ve gerçek veri kümeleri üzerinde gerçekleştirilmiş ve performansı artırılmış daha iyi karışım giderimi sonuçları elde edilmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, tensör ayırıştırmasının temel kavramları, TD kısıtı ve önerilen yaklaşım ayrıntılı bir şekilde anlatılmaktadır. Üçüncü bölümde, yapay ve gerçek veri kümeleri üzerinde yapılan çalışmalar ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Dördüncü bölümde ise, elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

2 Yöntem

Son zamanlarda tensör analiz yöntemleri, özellikle tensör faktörizasyonu için geliştirilen modeller ve etkili algoritmalar, geniş olarak çalışılmakta ve birçok gerçek zamanlı probleme uygulanmaktadır. Bunlar arasında sinyal işleme, bilgisayarlı görü, nörobilim ve veri madenciliği gibi uygulamalar sayılabilmektedir [10],[26]-[28].

Hiperspektral görüntüler üç boyutlu görüntü olduğu için doğal olarak tensör şeklinde ifade edilebilmektedir. Son elemanlar ve bunlara karşılık gelen bolluk değerleri bütün pikseller için yüksek dereceden tensörler olarak ifade edilebilmektedir. Son yıllarda standart karışım giderimi yaklaşımlarına bir alternatif olarak tensör faktörizasyonuna dayalı hiperspektral görüntünün düşük-rank parçalama gösterimleri birçok alanda başarılı bir şekilde çalışılmaktadır [29]. Örneğin; eksik olan piksellerin tahminlenmesi [30], anomali tespiti, sınıflandırma [31], sıkıştırma, boyut azaltımı vb. İki büyük dereceli tensörlerin düşük-rank parçalaması homojenliği yakalama özelliğine sahiptir. Özellikle düşük-rank tensör ifadesi gerekli olan hafıza miktarını azaltmakta, gürültüyü ortadan kaldırmakta ve ayırt edici özellikleri çıkartabilmektedir [32]. Bolluk değeri haritalarının tensör ayırıştırmasındaki düşük-rank ifadesi NMF gibi diğer karışım giderimi yaklaşımlarından çok daha etkili bir şekilde ifade edilebilmektedir. Bu çalışmada negatif olmayan tensör çarpanlarına ayırma modeli karışım giderimi yaklaşımı için kullanılmaktadır.

2.1 Tensör cebri

Lineer hiperspektral karışım giderimi, tensör notasyonu altında son elemanlar ve onlara karşılık gelen bolluk değeri haritalarının dış çarpımlarının toplamı şeklinde ifade edilebilmektedir. Bu matris-vektör üçüncü dereceden tensör çarpanlarına ayırma, Kanonik Polyadik Ayırıştırma - KPA (Canonical Polyadic Decomposition, CPD) ve Tucker Ayırıştırması (Tucker Decomposition)'nın bir kombinasyonu olan Blok Terim Ayırıştırması - BTA (Block Term Decomposition, BTD) [33]'nin özel bir durumu olarak kabul edilmektedir. Çok boyutlu bir dizi olan tensörün derecesi dizinin boyutuna eşittir. Bir skaler sıfıncı dereceden bir tensör iken, bir vektör birinci dereceden bir tensör ve bir matris ise, ikinci dereceden bir tensörü ifade etmektedir. Bu çalışmada, y skaler sayıyı, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^I$ vektörü ve $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ matrisi temsil etmektedir. $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ ile tensör gösterilmektedir. Tensör cebri ile ilgili en temel tanımlar aşağıda sunulmuştur [34].

2.1.1 Tensörün modu

Tensörün modu, tensörün farklı boyutlarını ifade etmektedir. Örnek olarak 2. derece bir tensör, matris, iki moddan oluşmaktadır. Bunlar; sütun modu ve satır modudur. Bir n -inci dereceden tensörün n modu vardır.

2.1.2 N-modlu açılım

N-modlu açılım, aynı zamanda n-modlu matrisleme olarak da tanımlanabilmektedir. Tensörün tüm n-modlu vektörlerini bir araya getirerek matris oluşturma işlemidir. Örnek olarak, bir 3. derece tensör olan $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$, mod-1, mod-2 ve mod-3 vektörleri ile Denklem 1,2 ve 3'de verildiği gibi üç şekilde ifade edilebilmektedir. Burada i, j ve k , bir tensörün her bir boyutunu temsil eden indislerdir.

$$(\mathbf{Y}_1)_{(j-1)K+k,i} = y_{ijk} \quad (1)$$

$$(\mathbf{Y}_2)_{(k-1)I+i,j} = y_{ijk} \quad (2)$$

$$(\mathbf{Y}_3)_{(i-1)J+j,k} = y_{ijk} \quad (3)$$

2.1.3 Dış çarpım

$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_P}$ ve $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_Q}$ tensörleri verilmiş olsun. Bu iki tensörün dış çarpımı daha yüksek mertebeli bir $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_P \times J_1 \times J_2 \times \dots \times J_Q}$ tensörünü oluşturmaktadır. Bu tensörün elemanları ise, Denklem 4'te verilmiştir. Burada 1,2, ..., P ve 1,2, ..., Q verilen tensörlerin her bir elemanını ve \circ simgesi dış çarpımı ifade etmektedir.

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})_{i_1 i_2 \dots i_P j_1 j_2 \dots j_Q} = a_{i_1 i_2 \dots i_P} b_{j_1 j_2 \dots j_Q} \quad (4)$$

2.1.4 Kronecker çarpımı

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I \times J}$ ve $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{T \times R}$ olarak verilen iki matrisin Kronecker çarpımı Denklem 5'te belirtilen şekilde \mathbf{A} matrisinin her bir elemanının \mathbf{B} matrisi ile çarpılarak elde edilen matris olarak tanımlanmaktadır. Kronecker çarpımı \otimes simgesi ile gösterilmektedir. Burada, I, J ve T, R sırasıyla \mathbf{A} ve \mathbf{B} matrislerinin satır ve sütun sayılarını ifade etmektedir.

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} \mathbf{B} & a_{12} \mathbf{B} & \dots & a_{1J} \mathbf{B} \\ a_{21} \mathbf{B} & a_{22} \mathbf{B} & \dots & a_{2J} \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1} \mathbf{B} & a_{I2} \mathbf{B} & \dots & a_{IJ} \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (5)$$

2.1.5 Khatri-Rao çarpımı

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I \times J}$ ve $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{T \times J}$ olarak verilen ve aynı sütun sayısına sahip olan iki matrisin Khatri-Rao Çarpımı Denklem 6'da gösterildiği gibi, her alt bölümün Kronecker çarpımı olarak ifade edilmektedir ve \odot simgesi ile gösterilmektedir. Burada $a_{1\dots j}$ ve $b_{1\dots j}$ \mathbf{A} ve \mathbf{B} matrislerinin her bir bölünmüş parçasını ifade etmektedir. Bu bölünmüş parçalar matrisin istenilen boyuttaki alt matrisleri olarak seçilebilir.

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = (a_1 \otimes b_1 \quad a_2 \otimes b_2 \quad \dots \quad a_J \otimes b_J) \quad (6)$$

2.1.6 Bölüm bazında Kronecker çarpımı

$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_R]$ ve $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_R]$ şeklinde aynı sayıda alt matrislerden oluşan iki blok matris verilmiş olsun. \odot işlemi, bölüm bazında Kronecker Çarpım olarak Denklem 7'deki gibi tanımlanmaktadır ve \odot simgesi ile ifade edilmektedir.

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1 \quad \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}_R \otimes \mathbf{B}_R) \quad (7)$$

2.1.7 Kanonik polyadik ayrıştırması

$\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_P}$ p-inci dereceden tensörü verilmiş olsun. Kanonik Polyadik Ayırıştırması - KPA, \mathcal{X} tensörünü Denklem 8'de gösterildiği gibi rank-1 tensör çarpanlarına ayırmaktadır. Burada $a_r^{(p)}$ boyutu $I_p \times R$ olan $\mathbf{A}^{(p)}$ matrisinin r'inci sütununu ifade etmektedir.

$$\mathcal{X} = \sum_{r=1}^R a_r^{(1)} \circ a_r^{(2)} \dots \circ a_r^{(P)} \quad (8)$$

2.1.8 Tucker ayrıştırması

Tucker Ayırıştırması-TA, p-inci dereceden tensör olan $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_P}$ 'yi rank - (r_1, \dots, r_p) çekirdekli \mathcal{G} tensörüne bağlı matrisler kümesine ayırmaktadır. Bağlı Denklem 9'da gösterilmiştir. Burada \mathcal{G} çekirdek tensörü, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$ ise \mathcal{Y} tensörünün 1...p modlu açınımlarıdır.

$$\mathcal{Y} = \mathcal{G} \times_1 \mathbf{A}_1 \times_2 \mathbf{A}_2 \times \dots \times_p \mathbf{A}_p \quad (9)$$

2.1.9 Düşük-sıralı blok terim ayrıştırması

Üçüncü dereceden tensör $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ için Tucker ayrıştırmasında tanımlanan notasyon kullanılarak, blok terim ayrıştırması Denklem 10'daki gibi tanımlanmaktadır.

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R \mathcal{G}_r \times_1 \mathbf{A}_r \times_2 \mathbf{B}_r \times_3 \mathbf{C}_r \quad (10)$$

Burada, $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{I \times L_r}$, $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{J \times M_r}$, $\mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{K \times N_r}$ ve $\mathcal{G}_r \in \mathbb{R}^{L_r \times M_r \times N_r}$ olmak üzere yukarıdaki ifade Blok Terim Ayırıştırması - BTA olarak tanımlanmaktadır. Bu ifade her bir rankı - (L_r, M_r, N_r) olan Tucker Ayırıştırması ile temsil edilebilen R bileşenli tensörler ile \mathcal{Y} 'ye yaklaşmayı amaçlamaktadır. KPA ve TA'nın bir kombinasyonu olarak da düşünülebilmektedir. Örnek olarak $R = 1$ olduğunda bu model TA'ya dönüşmektedir. Bu çalışmada BTA'nın, her bir bileşen tensörü bir matrisin $(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r^T)$ ve bir vektörün (\mathbf{c}_r) dış çarpımı ile rank - $(L_r, L_r, 1)$ tensörü şeklinde temsil edilen gösterimi kullanılmıştır. Bu tensör ayrışımı modeli Denklem 11'deki gibi ifade edilmektedir.

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r^T \circ \mathbf{c}_r \quad (11)$$

2.1.10 Toplam değişinti - TD (Total Variation -TV)

Uzamsal kısıtlayıcı terimlerle ilişkili spektral karışım giderimi yaklaşımları son yıllarda büyük bir önem kazanmıştır. Uzamsal kısıtlayıcı terimler, bolluk haritalarının düzgün olmasını ifade etmesine rağmen hiperspektral görüntüde kenar bilgisini koruyamamaktadır. Var olan karışım giderimi yaklaşımları genellikle bu kenar yapısını yok saymaktadır. Ya da bu kenar bilgisini kendi hiperspektral görüntüsünden elde etmektedir. Fakat bu bilgi, çok fazla gürültüden, ışıklandırma değişikliklerinden etkilenebilmektedir. Bu durum karışım giderimde hatalı uzamsal bilgiye sebep olabilmektedir. Bu çalışmada kenar bilgisini koruyan TD bilgisi hiperspektral verinin yanı sıra ışıklandırma gibi dış faktörlerden etkilenmeyen LiDAR-DYM verisinden elde edilmektedir.

2.1.11 Toplam değişinti kısıtlı NTF modeli

TD kısıtlı NTF modelinin maliyet fonksiyonu, Denklem 12'deki gibi yazılabilmektedir [23].

$$\min_{A,B,C} \frac{1}{2} \left\| y - \sum_{r=1}^R (A_r B_r^T) \circ c_r \right\|_F^2 + \frac{\delta}{2} \|\mathbf{1}_{IxJ} - \mathbf{A}B^T\|_F^2 + \lambda \sum_{r=1}^R (A_r B_r^T)_{TV} \quad (12)$$

s. t $A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0$

Burada $A = [A_1 \dots A_R]$ ve $B = [B_1 \dots B_R]$ dir. Bu modeldeki ilk iki terim orijinal MV-NTF [14] modelindeki terimlerdir. Son terim ise, bolluk haritalarında parçalı pürüzsüzlük elde etmek için eklenen toplam değişinti kısıtını ifade etmektedir. Bu model tensör çarpanlarına ayırma terimi nedeniyle konveks değildir. Bu nedenle, burada ADMM (Augmented Dimension Method of Multipliers) yaklaşımı kullanılmaktadır. Yardımcı değişkenler olarak A ve B matrisleri kullanılmaktadır. Böylece optimizasyon fonksiyonu Denklem 13'deki formata dönüşmektedir.

$$\min_{A,B,C,E,U,V} \frac{1}{2} \left\| y - \sum_{r=1}^R (A_r B_r^T) \circ c_r \right\|_F^2 + \frac{\delta}{2} \|\mathbf{1}_{IxJ} - \mathbf{A}B^T\|_F^2 + \lambda \sum_{r=1}^R (E_r)_{TV} \quad (13)$$

s. t $U = A, B = V, E_r = U_r V_r^T, A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0, U \geq 0, V \geq 0$

Değişken değiştirilerek elde edilen son fonksiyon ise Denklem 14'te verilmektedir.

$$\min_{A,B,C,E,U,V} \frac{1}{2} \left\| y - \sum_{r=1}^R (A_r B_r^T) \circ c_r \right\|_F^2 + \frac{\delta}{2} \|\mathbf{1}_{IxJ} - \mathbf{A}B^T\|_F^2 + \lambda \sum_{r=1}^R (E_r)_{TV} + \frac{\mu}{2} \sum_{r=1}^R \|E_r - U_r V_r^T\|_F^2 + \frac{\mu}{2} (\|U - A\|_F^2 + \|V - B\|_F^2) \quad (14)$$

s. t $A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0, U \geq 0, V \geq 0$

Bu denklemde tüm değişkenler bağımsızdır. Bu nedenle denklem, optimizasyon hedefi değiştirilerek çözülebilmektedir. Denklem 14'ün optimize edilmesi için Alternatif En Küçük Kareler (Alternating Least Square-ALS) yöntemi kullanılabilir. \mathcal{Y} tensörü mod-1 boyunca açılarak, A 'nın optimizasyon problemi Denklem 15'teki gibi elde edilebilmektedir.

$$f(A) = \min_A \frac{1}{2} \|\mathcal{Y}_{(1)} - \mathbf{M}A^T\|_F^2 + \frac{\delta}{2} \|\mathbf{1}_{IxJ} - \mathbf{A}B^T\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|U - A\|_F^2 + Tr(\Gamma A) \quad (15)$$

Burada $M = B \bar{C}$ ve $\mathcal{Y}_{(1)}$ mod-1 açılımlı matrislerdir. A için kısmi gradyan alınıp sıfıra ayarlanırsa, A için güncelleme kuralı Denklem 16'daki gibi elde edilmektedir.

$$A \leftarrow A * (\mathcal{Y}_{(1)}^T M + \delta \mathbf{1}_{IxJ} B + \mu U) ./ (\mathbf{A}M^T M + \delta \mathbf{A}B^T B + \mu A) \quad (16)$$

B ve C matrisleri için güncelleme kuralları benzer şekilde elde edilmektedir [23].

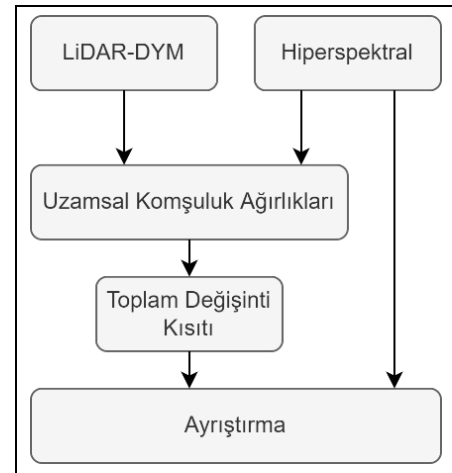
Blok terim ayrıştırması oldukça kısıtlı koşullar altında tekillik göstermektedir ve tensör verilerini bir bütün olarak ele alıp detaylı uzamsal yapıyı tam olarak kullanamamaktadır. Tensör çarpanlarına ayırma üzerine çeşitli uzamsal kısıtlamalar getirilerek bu problemin üstesinden gelenebilmektedir.

2.1.12 Lidar-DYM-tabanlı ağırlık fonksiyonu

Bu çalışmada kullanılan LiDAR-DYM-tabanlı ağırlık fonksiyonu w_{ij} bağıntısı Denklem 17'de verilmiştir. Burada $h_{i,j}$ DYM verileri, $y_{i,j}$ hiperspektral verinin spektral bant bilgisini, N ve M verinin satır ve sütun değerlerini ve K ise, son eleman sayısını ifade etmektedir. Bu denkleme göre, hiperspektral görüntünün bantları arasındaki farkın normu ve LiDAR-DYM bilgisinin farklarının negatiflerinin eksponansiyeli alınarak bütün son elemanlar ve satır-sütunlar boyunca toplanmasıyla elde edilmiştir. Bu ağırlık bilgisi orijinal MV-NTF [14]'ye eklenerek hiperspektral görüntü için karışım giderimi gerçekleştirilmiştir.

$$w_{ij} = \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^K \exp(-(h_{i,j} - h_k) - \|y_{i,j} - y_k\|) \quad (17)$$

Önerilen yaklaşımın akış diyagramı Şekil 1'de görülmektedir.



Şekil 1. Önerilen yaklaşımın akış diyagramı.

Figure 1. Proposed framework.

Buna göre, hem hiperspektral veriden hem de LiDAR-DYM'den elde edilen öznelilikler uzamsal komşuluk ağırlıkları şeklinde hesaplanmakta ve TD bağıntısında kullanılmaktadır. Bu TD bilgisi hiperspektral verinin karışım giderimi ile ayrıştırılması için kullanılmıştır. Böylelikle, TD kısıtı, görüntüdeki kenarların detay bilgilerini sağlarken, tensör çarpanlarına ayırma uzamsal bilginin korunmasını sağlamaktadır. Ayrıca, LiDAR-DYM'den elde edilen detay bilgisinin de hiperspektral görüntüye eklenmesi çözünürlüğü artırılmış görüntü elde etmeye katkı sağlamaktadır.

3 Deneysel çalışmalar

Bu çalışmada, hiperspektral görüntülerin karışım gideriminde LiDAR-DYM bilgisinden elde edilen veriler ile Toplam Değişinti kısıtı kullanılarak veri kaynaştırması gerçekleştirilmiş ve deneysel çalışmalar hem sentetik görüntü hem de gerçek görüntüler üzerinde gerçekleştirilmiştir. Literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırmalar yapılabilmesi için, çalışmada kullanılan veriler yine literatürde sıklıkla kullanılan yapay ve gerçek görüntülerden elde edilmiştir.

Bu bölümde kullanılan veriler ve bu verilerle oluşturulan deney ortamıyla ilgili detaylı bilgiler sunulmuştur. Deneyler MATLAB programı kullanılarak, 6 Mb önbelleğe sahip 4 çekirdek ve 4 iş parçacığından oluşan 2.7 GHz hızında çalışan Intel i5-6400 işlemcisi ile birlikte 8 Gb RAM barındıran bilgisayar ortamında gerçekleştirilmiştir.

3.1 Yapay veri üzerinde gerçekleştirilen deneyler

Bu çalışmada, önerilen yöntemin performansını ölçmek amacıyla [18]'deki SIM2 yapay verisi kullanılmıştır. Bu veri Amerika Birleşik Devletleri Jeoloji Araştırmaları Kurumu (United States Geological Survey - USGS) tarafından sağlanan, dalga boyu 0.38-2.5 μm aralığında değişen Karnalit, Amonyojarosit, Almandin, Brusit, Aksinit ve Klonte minerallerinin spektral imzaları kullanılarak 224 spektral bant içermektedir. Bu verilere, eş zamanlı olarak toplanmış DYM verisi de eklenmiştir. Deneysel çalışmalar 20dB, 30dB ve 50dB beyaz gürültü eklenen, 64x64 ve 81x81 piksel boyutlarındaki farklı görüntüler üzerinde gerçekleştirilmiştir.

Yapay veri üzerinde gerçekleştirilen deneysel çalışmada, son elemanların ve bolluk haritalarının başlangıç değerleri iki farklı yöntemle oluşturulmuştur. Bunlardan birincisinde son eleman matrisi "toplama bir (sum-to-one)" kısıtı gözetilerek rastgele sayılar üretilerek oluşturulmuştur. Bolluk haritaları ise, 0-1 aralığında normal dağılımlı rastgele sayılar üretilerek oluşturulmuştur. İkinci yöntemde ise, Köşe Bileşeni Analizi-KBA (Vertex Component Analysis-VCA) kullanılarak son eleman matrisi oluşturulmuş ve Tam Kısıtlı En Küçük Kareler-TKEK (Fully Constrained Least Squares-FCLS) yaklaşımı kullanılarak da bolluk haritaları matrisi oluşturulmuştur. Bu iki yöntemde de oluşturulan matrisler tensör çarpanlarına ayırmada başlangıç değer olarak kullanılmıştır.

Yapay veride son eleman ve bolluk haritası matrisleri tam olarak bilindiği için, yöntemin performans değerlendirme kriteri olarak Hata Kareleri Ortalamalarının Karekökü-HKOK (Root Mean Square Error-RMSE) kullanılmıştır. Bitirme kriteri olarak, her bir iterasyonda elde edilen maliyet fonksiyonu sonucunun toleransı hesaplanmış, bu sonuç on binde birin altına düştüğünde iterasyonlar bitirilmiştir. Tüm yapay veri deneyleri, $\lambda = \{0.0001, 0.25, 1\}$, $\mu = \{0.5, 3, 25\}$ ve Rank = $\{20, 40, 60, 80, 100\}$ hiperparametreleriyle ızgara arama yöntemiyle taranarak gerçekleştirilmiştir. Tablo 1 ve Tablo 2'de

her iki yöntem ile gerçekleştirilen deneylerin sonuçları, tensör çarpanlarına ayırma yöntemi literatüründeki son çalışmalarından biri olan TD-MV-NTF yöntemi ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 1. 64x64 Görüntü boyutunda Li-TD-NTF.

		HKOK (RMSE)	
		20dB	30dB
Rastgele	Li-TD-NTF	0.121376	0.121638
başlatma	TD-MV-NTF [23]	0.135287	0.133842
FCLS	Li-TD-NTF	0.137966	0.139515
başlatma	TD-MV-NTF [23]	0.143437	0.143212

Tablo 2. 81x81 Görüntü boyutunda Li-TD-NTF.

		HKOK (RMSE)	
		20dB	50dB
Rastgele	Li-TD-NTF	0.119726	0.118535
başlatma	TD-MV-NTF [23]	0.136287	0.137737
FCLS	Li-TD-NTF	0.129078	0.104353
başlatma	TD-MV-NTF [23]	0.140204	0.127369

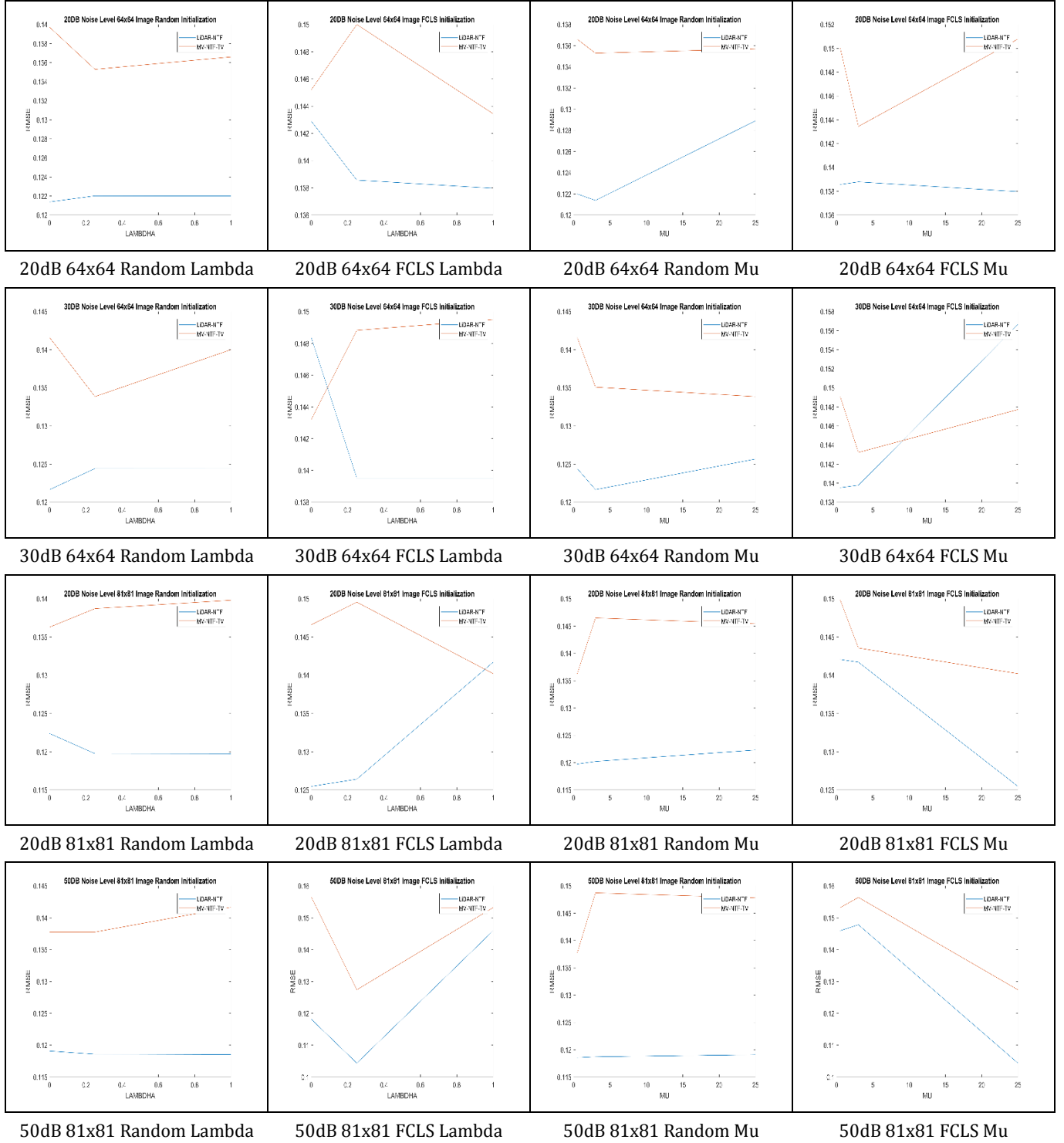
Tablo 1'de görüldüğü gibi 20dB ve 30dB gürültülü 64x64 piksel boyutlarındaki görüntülerde gerçekleştirilen deney sonuçlarına göre, önerilen Li-TD-NTF yöntemi, literatürdeki en yakın yöntem olan TD-MV-NTF yöntemine göre daha iyi performans göstermiştir. Tablo 2'de ise 20dB ve 50dB gürültülü 81x81 piksel boyutlarındaki görüntülerde gerçekleştirilen deney sonuçlarına göre önerilen yöntemin, düşük HKOK (RMSE) sonuçlarıyla daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Şekil 2'de, bağıntısı Denklem 13'te verilen λ ve μ parametrelerine göre HKOK (RMSE) değerlerinin değişimini gösteren grafikler sunulmuştur. Bu grafiklere bakıldığında, önerilen yöntemin en küçük HKOK (RMSE) değeri için gerekli olan parametre ayarları açıkça görülebilmektedir. Burada en uygun parametre değerlerinin bulunmasında zaman kaybı yaşanmaması için ızgara arama yöntemi uygulanmıştır. Bu yöntemde göre parametreler kontrollü bir şekilde belirli aralıklarla artırılarak sonuçlar gözlemlenmektedir. Elde edilen en küçük (veya en büyük) değeri veren parametreler, sonraki aşamalarda kullanılmak üzere kaydedilerek belirlemektedir. Şekil 2'deki grafikler, yapay veriler üzerindeki deneyler gerçekleştirilirken seçilen parametrelere göre HKOK değerlerinin değişimini göstermektedir.

3.2 Gerçek veriler üzerinde gerçekleştirilen deney

Gerçek veri deneyinde, Yerbilim ve Uzaktan Algılama Topluluğu-YUAT (Geoscience and Remote Sensing Society-GRSS) tarafından 2013 yılında yayımlanan yarışma verisi kullanılmıştır. Bu veri, Amerika Texas eyaletinde bulunan Houston Üniversitesi kampüsü üzerinde spectral kamera ve LiDAR sensörü ile toplanmış, 2.5 m uzamsal çözünürlüğe ve 308 nm ile 1050 nm spectral aralıktaki 144 adet spectral banda sahip hiperspektral görüntüyü içermektedir.

Bu çalışmada, küçük bir alanda fazla çeşitlilik içermesi nedeniyle Houston Üniversitesi kampüsü içerisindeki Robertson stadyumu civarından 100x130x144 boyutlarında bir kesit alınarak, alt veri kümesi oluşturulmuş ve deneyler bu alt veri kümesinde gerçekleştirilmiştir.



Şekil 2. Hiperparametrelerin değişimine göre HKOK (RMSE) grafikleri.

Figure 2. RMSE plots according to the hyperparameters.

Şekil 3'te bu alt veriden sırasıyla 57, 30, 20 No.lu Kırmızı, Yeşil ve Mavi renk uzayı temsilcilerini içeren bantlarla oluşturulmuş bir görüntü görülmektedir. Gerçek veri deneyinde, yapay veri deneyinde de olduğu gibi, öncelikle son eleman ve bolluk haritaları matrislerinin başlangıç değerleri atanmalıdır. Bu nedenle, son eleman matrisinin elde edilmesi için KBA yöntemi

kullanılmıştır. Burada elde edilen son eleman matrisine göre ise TKEK yöntemiyle bolluk haritaları matrisi elde edilmiştir. Elde edilen bu iki başlangıç matrisi kullanılarak optimizasyon iterasyonları başlatılmıştır.



Şekil 3. Gerçek veri deneylerinde kullanılan alt veri kümesinden bir görünüm (sadece KYM bantları).

Figure 3. A view from the sub-dataset where the real data experiments were performed (only RGB bands).

Gerçek verilerde, son eleman ve bolluk haritaları matrisi net olarak bilinemediği için, belirli bir performans kriteri kullanılamamaktadır [18]. Deneyler gerçekleştirilirken, yapay veri deneylerinde de olduğu gibi maliyet fonksiyonu değerinin toleransının on binde birin altına düşmesi bitirme kriteri olarak kullanılmıştır. Yöntemin performansı ise görsel olarak karşılaştırma metoduyla değerlendirilmiştir. Deneyler sonucunda elde edilen görsel sonuçlar Şekil 4'te sunulmuştur.

Şekil 4'te görüldüğü gibi, stadyumun orta kısmında ve çevresinde bulunan bitki alanları, Li-TD-NTF yönteminde dalgali bir görünüme sahipken TKEK ayrıştırma düz ve net bir görüntü görülmektedir. Bunun nedeni Li-TD-NTF yönteminde cisimlerin yükseklik bilgisinin de işleme alınmasıdır. Farklı yükseklikte bulunan bitkiler aynı sınıfta olduğu için, bu görüntüler dalgali görünmektedir. Metal çatı ve beton cisimleri için, yükseklik bilgisinin ayırt edici özelliği net olarak görülmektedir. Şekil 4'te görüldüğü gibi önerilen yöntemde çatılar net olarak görülebilirken, FCLS yönteminde daha belirsiz bir görünüm elde edilmektedir. Aynı şekilde beton cisimler için de önerilen yöntemin üstünlüğü açıkça görülmektedir.

4 Sonuçlar

Bu çalışmada, LiDAR-DYM verileri yardımıyla tensör çarpanlarına ayırmaya dayalı hiperspektral karışım giderimi işlemi gerçekleştirilmiştir. Böylece, TD benzeri düzenleyicilere derinlemesine odaklanılan bu çalışmada yeni LiDAR-DYM tabanlı uzamsal düzenlemenin eklenmesi, daha iyi bolluk haritası tahmini sağlamaktadır. Çalışmada yapılan deneyler, yapay veri ve gerçek veri kullanılarak gerçekleştirilmiş ve literatürdeki tensör çarpanlarına ayırma yöntemlerine en yakın çalışma ile karşılaştırılmıştır. Önerilen yöntem, diğer uzamsal kısıtlayıcı yaklaşımlara göre daha iyi performans göstermiştir. Böylece, önerilen yöntemin deneysel çalışması farklı gürültü ve farklı boyutlardaki görüntüler üzerinde gerçekleştirilerek zenginleştirilmiştir. LiDAR-DYM'den elde edilen özneliklerin hiperspektral görüntüler üzerine eklenerek tensör ayrıştırması ile uzamsal çözünürlüğü artırılmış görüntü elde edilmiştir. Gelecekte, önerilen yöntemin daha farklı veri kümeleri üzerinde deneylerinin gerçekleştirilmesi planlanmaktadır. Ayrıca bulut gölgeli alanlarda yöntemin performansı test edilerek literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırılması hedeflenmektedir.

5 Conclusion

In this study, hyperspectral unmixing based on tensor factorization was performed with the help of LiDAR-DSM data. Thus, the inclusion of the new LiDAR-DSM-based spatial regularization, which focuses in-depth on TV-like regularizations, provides better abundance map estimation. The experiments were carried out using synthetic and real data and the results were compared with another method in the literature. The proposed method outperforms other spatially constrained approaches. Thus, the experimental study of the proposed method is enhanced by performing it on images with different Gaussian noise and different sizes. Spatially enhanced hyperspectral images are achieved by combining the features obtained from LiDAR-DSM with tensor factorization. In the future, it is planned to perform studies of the proposed method on different datasets. In addition, it is aimed to test the performance of the method in cloudy shaded areas and compare it with other studies in the literature.

	Bitki	Metal çatı	Beton	Asfalt
FCLSU				
LiMV-NTF-TV				

Şekil 4. Gerçek veri deneyi görsel sonuçları.

Figure 4. Visual results of real data experiments.

6 Yazar katkı beyanı

Gerçekleştirilen çalışmada Sevcan KAHRAMAN yöntemin belirlenmesi, Atakan KAYA literatür taraması, Kubilay ATAŞ deneylerin yapılması ve sonuçların değerlendirilmesi, yazım denetimi ve içerik açısından makalenin kontrol edilmesi çalışmaları ile birlikte literatür taraması çalışmalarına katkı sunmuşlardır.

7 Etik kurul onayı ve çıkar çatışması beyanı

Hazırlanan makalede etik kurul izni alınmasına gerek yoktur. Hazırlanan makalede herhangi bir kişi/kurum ile çıkar çatışması bulunmamaktadır.

8 Kaynaklar

- [1] Nasrabadi NM. "Hyperspectral target detection: An overview of current and future challenges". *IEEE Signal Processing Magazine*, 31(1), 34-44, 2014.
- [2] Camps-Valls G, Tuia D, Bruzzone L, Benediktsson JA. "Advances in hyperspectral image classification: Earth monitoring with statistical learning methods". *IEEE Signal Processing Magazine*, 31(1), 45-54, 2014.
- [3] Bioucas-Dias JM, Plaza A, Dobigeon N, Parente M, Du Q, Gader P, Chanussot J. "Hyperspectral unmixing overview: Geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches". *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 5(2), 354-379, 2012.
- [4] Keshava N, Mustard JF. "Spectral unmixing". *IEEE Signal Processing Magazine*, 19(1), 44-57, 2002.
- [5] Lee D, Seung H. "Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization". *Nature*, 401, 788-791, 1999.
- [6] Lee D, Seung H. "Algorithms for non-negative matrix factorization". *Advances in Neural Information Processing Systems*, 13, 556-562, 2001.
- [7] Pauca VP, Piper J, Plemmons RJ. "Nonnegative matrix factorization for spectral data analysis". *Linear Algebra and its Applications*, 416, 29-47, 2006.
- [8] Iordache MD, Bioucas-Dias JM, Plaza A. "Total variation spatial regularization for sparse hyperspectral unmixing". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 50(11), 4484-4502, 2012.
- [9] Cichocki A, Mandic DP, Phan AH, Caiafa CF, Zhou G, Zhao Q, Lathauwer LD. "Tensor decompositions for signal processing applications: From two-way to multiway component analysis". *IEEE Signal Processing Magazine*, 32(2), 145-163, 2015.
- [10] Kolda TG, Bader BW. "Tensor decompositions and applications". *Society for industrial and applied mathematics*, 51(3), 455-500, 2009.
- [11] Yokota T, Zhao Q, Cichocki A. "Smooth PARAFAC decomposition for tensor completion". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 64(20), 5423-5436, 2016.
- [12] Hu W, Tao D, Zhang W, Xie Y, Yang Y. "The twist tensor nuclear norm for video completion". *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 28(12), 2961-2973, 2017.
- [13] Narita A, Hayashi K, Tomioka R, Kashima H. "Tensor factorization using auxiliary information". *Data Mining and Knowledge Discovery*, 25(2), 298-324, 2012.
- [14] Qian Y, Xiong F, Zeng S, Zhou J, Tang YY. "Matrix vector nonnegative tensor factorization for blind unmixing of hyperspectral imagery". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 55(3), 1776-1792, 2017.
- [15] Kahraman S, Bacher R. "A comprehensive review of hyperspectral data fusion with LiDAR and SAR data". *Annual Reviews in Control*, 51(2), 236 -253, 2021.
- [16] Jung J, Pasolli E, Prasad S, Tilton JC, Crawford MM. "A framework for land cover classification using discrete return LiDAR data: Adopting pseudo-waveform and hierarchical segmentation". *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 7(2), 491-502, 2014.
- [17] Luo R, Liao W, Zhang H, Zhang L, Scheunders P, Pi Y, Philips W. "Fusion of hyperspectral and LiDAR data for classification of cloud-shadow mixed remote sensed scene". *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 10(8), 3768-3781, 2017.
- [18] Uezato T, Fauvel M, Dobigeon N. "Hyperspectral image unmixing with LiDAR data-aided spatial regularization". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 56(7), 4098-4108, 2018.
- [19] Yüksel SE, Boyacı M. "LiDAR sensörünün hiperspektral verilerden gölgelik alan çıkarımı başarımına etkisi". *Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 24(2), 198-204, 2018.
- [20] Xue Z, Yang S, Zhang H, Du P. "Coupled higher-order tensor factorization for hyperspectral and LiDAR data fusion and classification". *Remote Sensing*, 11(17), 1-27, 2019.
- [21] Li N, Pfeifer N, Liu C. "Airborne LiDAR points classification based on tensor sparse representation". *Annals of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 4, 107-114, 2017.
- [22] Li N, Liu C, Pfeifer N, Yin JF, Liao ZY, Zhou Y. "Tensor modelling based for airborne LiDAR data classification". *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 41, 283-287, 2016.
- [23] Xiong F, Qian Y, Zhou J, Tang YY. "Hyperspectral unmixing via total variation regularized nonnegative tensor factorization". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 57(4), 1-17, 2018.
- [24] He S, Zhou H, Wang Y, Cao W, Han Z. "Super-resolution reconstruction of hyperspectral images via low rank tensor modeling and total variation regularization". *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, Beijing, China, 10-15 July 2016.
- [25] Rasti B, Ghamisi P, Gloaguen R. "Hyperspectral and LiDAR fusion using extinction profiles and total variation component analysis". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 55(7), 3997-4007, 2017.
- [26] Hazan T, Polak S, Shashua A. "Sparse image coding using a 3D non-negative tensor factorization". *Tenth IEEE International Conference on Computer Vision*, Beijing, China, 17-21 October 2005.
- [27] Khan SA, Kaski S. "Bayesian multi-view tensor factorization". *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*, Nancy, France, 15-19 September 2014.
- [28] Schaehtle U, Stathis K, Bromuri S. "Multi-dimensional causal discovery". *Proceedings of the Twenty-Third International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Beijing, China, 3-9 August 2013.

- [29] Imbiriba T, Borsoi RA, Bermudez JCM. "Low-rank tensor modeling for hyperspectral unmixing accounting for spectral variability". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 58(3), 1833-1842, 2020.
- [30] Ng MK-P, Yuan Q, Yan L, Sun J. "An adaptive weighted tensor completion method for the recovery of remote sensing images with missing data". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 55(6), 3367-3381, 2017.
- [31] He Z, Li J, Liu L. "Tensor block-sparsity based representation for spectral-spatial hyperspectral image classification". *Remote Sensing*, 8(8), 1-21, 2016.
- [32] Fan H, Chen Y, Guo Y, Zhang H, Kuang G. "Hyperspectral image restoration using low-rank tensor recovery". *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 10(10), 4589-4604, 2017.
- [33] Lathauwer LD, Nion D. "Decompositions of a higher-order tensor in block terms-Part III: Alternating least squares algorithms". *Journal on Matrix Analysis and Applications*, 30(3), 1067-1083, 2008.
- [34] Cichocki A, Zdunek R, Phan AH, Amari S. *Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation*. Singapore, John Wiley & Sons, 2009.